

Cebir II Bütünleme Cevap Anahtarı

①

1- a) $\forall a, asa \in S$ için $ara - asa = a(r-s)a$ ve $(ara)(asa) = ar(a^2)sa = arsa$, $a \cdot 1_R a = a^2 = 1$ olup $1_R \in S$ dir.

b) $(1,0) \neq (0,0)$, $(0,1) \neq (0,0)$, $(1,0) \cdot (0,1) = (0,0)$ olup T.B değildir.

2- a) $h(x) = 35f(x) = 15x^4 - 10x^2 + 9x + 21$

$\bar{h}(x) = x^4 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $\bar{h}(\bar{0}) \neq \bar{0}$, $\bar{h}(\bar{1}) \neq \bar{0}$
 $\mathbb{Z}_2[x]$ 'de $x^2 + x + 1$ asal olup $x^2 + x + 1 \nmid x^4 + x + 1$
 olduğundan $\bar{h}(x)$, $\mathbb{Z}_2[x]$ 'de asal. O halde $f(x)$, $\mathbb{Q}[x]$ 'de asaldır.

b) $I \neq \{0_R\}$ ve $J \neq \{0_R\}$ ise $\exists 0_R \neq a \in I$, $\exists 0_R \neq b \in J$
 vardır. $ab \in I$, $ab \in J \Rightarrow a \cdot b \in I \cap J$, R T.B
 olduğundan $a \cdot b \neq 0_R$ dir.

3- a) $-33 + 4i = (1+2i)(3+2i)(1+4i)$

$$b) 12+i = (3+8i)(1-i) + 1-4i$$

$$3+8i = (1-4i)(-2+2i) - 3-2i$$

$$1-4i = (-3-2i)(1+i) + 2+i$$

$$-3-2i = (2+i)(-2-i) + 2i$$

$$2+i = (1-i) \cdot 2i - i$$

$$(3+8i, 12+i) = -i = i$$

4- a) I , R 'nin asıkır olmayan sol ideali olsun. $\exists a \in I$ ve $a \neq 0_R$, $a^{-1} \cdot a = 1_R \in I$ olup $I = R$ bulunur.

b) $I \neq \{0_R\}$ ve I asal ideal, J, I 'yi kapsayan her hangi bir ideal olsun.

$I \subset J \Rightarrow \exists a \in J \setminus I$ vardır.

$a \cdot (1-a) = a - a^2 = a - a = 0_R$ ve $a \notin I$ olduğundan

$1-a \in I$, $I \subset J \Rightarrow 1-a \in J \Rightarrow 1 \in J \Rightarrow J = R$

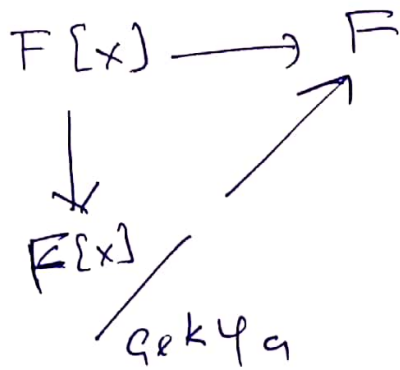
olup I maksimeldir.

5- $\forall f(x) \in F[x]$ için $\varphi_a(f(x)) = f(a) \in F$ olup $\textcircled{2}$
 kapalıdır.

$f(x), g(x) \in F[x]$ için
 $f(x) = g(x) \Rightarrow f(a) = g(a) \Rightarrow \varphi_a(f(x)) = \varphi_a(g(x))$
 olup iyi tanımlıdır.

$\forall f(x), g(x) \in F[x]$ için
 $\varphi_a(f(x) + g(x)) = \varphi_a((f+g)(x)) = (f+g)(a) = f(a) + g(a)$
 $\varphi_a(f(x) \cdot g(x)) = \varphi_a((f \cdot g)(x)) = (f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$
 olup homomorfizmadır.

$b \in F$ olsun. $f(x) = b - ax + x^2 \in F[x]$
 den φ_a örten dir.



$$\frac{F[x]}{\varphi_a} \cong F \text{ olup}$$

homomorfizma teo. gereği φ_a
 maksimaldir. (F cisim)
 \downarrow
 izomorfizma gerçektir.