Cebir II Bütünleme Cevap Anahtarı

1- a) $\forall ara, asa \in S$ için $ara - asa = a(r-s)a$ ve $(ara)(asa) = ar(a^2)sa = arsa$, $a.1_R a = a^2 = 1$ olup $1_R \in S$ dir.

b) $(1,0) \neq (0,0)$, $(0,1) \neq (0,0)$, $(1,0).(0,1) = (0,0)$ olup T.B değildir.

2- a) $h(x) = 35 f(x) = 15x^4 - 10x^2 + 9x + 21$

$\overline{h(x)} = x^4 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $\bar{h}(\bar{0}) \neq \bar{0}$, $\bar{h}(\bar{1}) \neq \bar{0}$

$\mathbb{Z}_2[x]$'de $x^2 + x + 1$ asal olup $x^2 + x + 1 \nmid x^4 + x + 1$ olduğundan $\bar{h}(x)$, $\mathbb{Z}_2[x]$'de asal. O halde $f(x)$, $\mathbb{Q}[x]$'de asaldır.

b) $I \neq \{0_R\}$ ve $J \neq \{0_R\}$ ise $\exists\, 0_R \neq a \in I$, $\exists\, 0_R \neq b \in J$ vardır. $ab \in I$, $ab \in J \Rightarrow a.b \in I \cap J$, R T.B olduğundan $a.b \neq 0_R$ dir.

3- a) $-33 + 4i = (1+2i)(3+2i)(1+4i)$

b) $12 + i = (3+8i)(1-i) + 1 - 4i$

$3 + 8i = (1-4i)(-2+2i) - 3 - 2i$

$1 - 4i = (-3-2i)(1+i) + 2 + i$

$-3 - 2i = (2+i)(-2-i) + 2i$

$2 + i = (1-i).2i - i$ $\quad\quad (3+8i, 12+i) = -i = i$

4- a) I, R'nin aşikar olmayan sol ideali olsun. $\exists a \in I$ ve $a \neq 0_R$, $a^{-1}.a = 1_R \in I$ olup $I = R$ bulunur.

b) $I \neq \{0_R\}$ ve I asal ideal, J, I'yı kapsayan her hangi bir ideal olsun.

$I \subset J \Rightarrow \exists a \in J \setminus I$ vardır.

$a.(1-a) = a - a^2 = a - a = 0_R$ ve $a \notin I$ olduğundan $1 - a \in I$, $I \subset J \Rightarrow 1 - a \in J \Rightarrow 1 \in J \Rightarrow J = R$ olup I maksimaldir.

5- $\forall f(x) \in F[x]$ için $\varphi_a(f(x)) = f(a) \in F$ olup kapalıdır.

$f(x), g(x) \in F[x]$ için

$f(x) = g(x) \Rightarrow f(a) = g(a) \Rightarrow \varphi_a(f(x)) = \varphi_a(g(x))$

olup iyi tanımlıdır.

$\forall f(x), g(x) \in F[x]$ için

$\varphi_a(f(x)+g(x)) = \varphi_a((f+g)(x)) = (f+g)(a) = f(a)+g(a)$

$\varphi_a(f(x)\cdot g(x)) = \varphi_a((f\cdot g)(x)) = (f\cdot g)(a) = f(a)g(a)$

olup homomorfizmadır.

$b \in F$ olsun. $f(x) = b - ax + x^2 \in F[x]$

den φ_a örtendir.

$$\begin{tikzcd} F[x] \arrow[r] \arrow[d] & F \\ F[x]/\text{Çek}\,\varphi_a \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$F[x]/\text{Çek}\,\varphi_a \cong F$ olup

homomorfizma teo. gereği Çek φ_a maksimaldir. (F cisim)

$\downarrow$

İzomorfizma gerçeklesir.